ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio – Numero 216 – Pubblicato il 05 – 09 – 2016

Verifiche di accertamento didattico

di Luciano Corso

Le prove INVALSI

Consideriamo questo semplice caso. Ci siano due gruppi di studenti A e B. Si decida di verificare il loro livello formativo in una certa disciplina; per esempio la matematica. Si prepara un test (ovviamente concordato da un gruppo di docenti della disciplina; supponiamo che consista in 10 problemi o quesiti) e lo si somministra a ciascun studente senza sapere se questo appartiene al gruppo A o B. Dopo aver concesso un congruo lasso di tempo per la risoluzione dei quesiti si raccolgono i lavori e li si sottopongono ad esame (di una commissione costituita da un congruo numero di docenti). Si valutano con metodi quantitativi i compiti e, sulla base di un preciso criterio di giudizio anche questo concordato, si calcolano le medie dei due gruppi di studenti di nuovo separati dopo la valutazione: siano le medie rispettivamente $m(A)$ e $m(B)$. Si confrontano le due medie dei due gruppi con un opportuno test d'ipotesi (inferenza statistica). Può succedere che la differenza tra $m(A)$ e $m(B)$ non sia significativa pur risultando diversa. In tal caso si conclude che non ci sono buone ragioni per dire che i livelli di preparazione dei due gruppi sono diversi (eventuali differenze sono solo casuali). Può, però, accadere che le due medie risultino significativamente diverse. In questo caso uno dei due gruppi risulterà essere meno preparato (con una formazione culturale più debole) dell'altro. Qui finisce l'indagine strettamente statistica.

A questo punto la ragione di questo risultato può dipendere da due cause, a parità di altre condizioni: o che la differenza di preparazione riscontrata dipende dalle diverse abilità medie dei due gruppi di studenti, o che dipende dalle diverse metodologie usate dai docenti dei due gruppi. Se i due gruppi di studenti sono diversi nelle abilità medie, allora si tratterà di mettere in discussione i criteri di selezione degli alunni durante la costituzione delle classi. Se, invece, le classi risultano omogenee, allora le differenze sono certamente da attribuire alle diverse metodologie didattiche e d'indirizzo programmatico usate dai docenti. In questo caso, diventa necessario un confronto e un giudizio sulla qualità dell'insegnamento.

Che cosa ci sia di sbagliato in tutto ciò, non so; ma finalmente per necessità si potranno evitare due cose odiosissime: 1) che i docenti facciano ciò che vogliono, indipendentemente dai risultati; 2) che i docenti abbiamo la pretesa di essere sempre nel giusto nel seguire le proprie convinzioni educative senza ammettere confronti e possibilità di giudizio sul loro operato. Non ho seguito molto le indagini INVALSI e quindi potrei anche sbagliarmi, ma da quanto ne so questi sono i metodi, almeno in generale, e questi gli obiettivi che caratterizzano il suo lavoro.

Prove d'esame: una diversa proposta di valutazione

Consideriamo che una commissione d'esame abbia da valutare il profitto degli studenti di 2 classi X e Y. Lasciando da parte gli attuali equilibrismi di legge che non si sa bene da che provengano, ma che non sono altro che forzature poco scientifiche e molto leguleie, i membri esterni della commissione d'esame possono procedere nel seguente semplice modo:

1) Si calcolano le medie e le deviazioni standard campionarie degli studenti delle classi X e Y: $m(X)$, $m(Y)$, $s(X)$ e $s(Y)$.

2) Si verifica l'ipotesi H_0 se i due gruppi presentano una differenza significativa delle loro medie di presentazione:

H_0: $\mu(X) = \mu(Y)$, H_1: $\mu(X) \neq \mu(Y)$, α,

dove α è il livello di significatività. Si deve fare l'ipotesi che i voti provengano da una distribuzione Normale. Se si è in presenza di grandi campioni o nei piccoli con varianza stimata si può quindi applicare la Normale o la T-Student usando la variabile aleatoria $\bar{x} - \bar{y}$ (differenza di medie aritmetiche campionarie). Le statistiche da calcolare per l'applicazione del test sono:

$$z = (\bar{x} - \bar{y}) \Big/ \sqrt{\left(\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}\right)} \quad , \quad t = (\bar{x} - \bar{y}) \Big/ s_p \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}$$

dove s_x^2 e s_y^2 sono le varianze campionarie corrette, n_x e n_y sono le numerosità degli studenti dei due gruppi X e Y, e s_p è la deviazione standard ponderata:

$$s_p = \sqrt{\frac{n_x s_x^2 + n_y s_y^2}{n_x + n_y - 2}} \quad .$$

3) Si confrontano quindi i valori di z o di t calcolati con quelli critici al livello di significatività del 5%. Se lo z (o t) calcolato cade nella regione di accettazione dell'ipotesi H_0 la si accetta e si conclude che non ci sono buone ragioni per dubitare che i due gruppi (classi) abbiano preparazioni d'arrivo omogenee; altrimenti si respinge H_0 e possiamo pensare che effettivamente i due gruppi vengono presentati con caratteristiche di preparazione diverse. Questa valutazione va fatta preliminarmente e indipendentemente da ciò che pensano i commissari interni. Poi si procede nello stesso modo per valutare le prove d'esame dei due gruppi: si dà un voto in decimi (o anche in altre basi); si calcolano quindi le medie e le deviazioni standard; si procede come sopra. Si valuta se i risultati degli esami dimostrano una differenza significativa tra i due gruppi. A questo punto possono riscontrarsi questi casi: *a*) X e Y sono due classi che hanno una presentazione pressappoco uguale e l'esame ha confermato che i risultati non sono significativamente diversi; *b*) X e Y hanno una presentazione pressoché uguale, ma le prove d'esame hanno dimostrato che una classe ha riportato risultati significativamente diversi dall'altra: è il caso in cui occorre segnalare il fatto ai consigli di classe e tener conto della diversità riscontrata nella valutazione finale; *c*) X e Y sono presentate in modo diverso, ma le prove d'esame non sono significativamente differenti: anche in questo caso la differenza va segnalata e si deve tener conto nella valutazione finale di quanto è emerso; *d*) X e Y hanno una presentazione significativamente diversa e le prove d'esame confermano questa diversità.

Facciamo un esempio. X e Y sono classi rispettivamente di 26 e 23 studenti. Le medie aritmetiche dei voti di presentazione sono $\bar{x}$ = 6,5 e $\bar{y}$ = 7,2 con deviazioni standard di s_x= 2 e s_y= 1,4. Le due presentazioni sono significativamente diverse? Effettuiamo un test d'ipotesi al livello di significatività del 5% usando la statistica T-Student (siamo nei piccoli campioni provenienti da una Normale, con deviazione standard stimata):

$H_0: \mu_x = \mu_y$, $H_1: \mu_x \neq \mu_y$, $\alpha = 0{,}05$.

La regione di accettazione dell'ipotesi H_0 (dalle tabelle con $\nu = n_x + n_y - 2 = 26 + 23 - 2 = 47$ è (–2,013; +2,013). Calcolando s_p e t si ottiene: $s_p \cong 1{,}781$ e $t \cong -1{,}37$. Poiché t calcolato cade nella regione di accettazione di H_0 si conclude che non ci sono buone ragioni per affermare che le due classi hanno presentazioni significativamente diverse. Il test è tanto più debole quanto più è alta la variabilità dei voti assegnati dai docenti.

I metodi quantitativi usati in questo articolo si possono trovare in un qualunque manuale di statistica inferente per studenti.

La maturità di un giovane cresce al variare del tempo in modo lineare o a gradini?

Infine, merita fare anche questa considerazione. L'attuale modo di valutare gli studenti all'esame di Stato tende a premiare, a parità di condizioni, quegli studenti che hanno avuto una regolarità di studi, cioè che hanno seguito una crescita formativa ad andamento costante (lineare). Ci sono studenti, però, che arrivano a dimostrarsi bravi solo a tratti, spesso anche irregolari; alcuni addirittura dimostrano la loro bravura solo alla fine degli studi.

Analisi matematica standard e non standard a confronto - 1

di Alberto Burato e Luciano Corso

Mettiamo a confronto i punti di vista dell'analisi standard e dell'analisi non standard cercando di evidenziare le differenze che rendono vantaggiosa l'ultima rispetto alla prima.

Continuità di una funzione

Per l'*analisi standard*, una funzione f definita in un insieme $\mathbf{X}$ di $\mathbf{R}$ si dice continua in un punto x_0 se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \,. \qquad (1)$$

In modo molto sintetico, assumendo che x_0 sia un punto di accumulazione di $\mathbf{X}$, si usa scrivere:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Come è noto, l'enunciato (1) presenta una notevole difficoltà concettuale e costringe gli studenti, impegnati a dimostrare la continuità di una funzione in un punto, a una verifica molto spesso laboriosa. Per rendersene conto, proviamo a verificare se la funzione $f(x) = x^2$ è continua in un punto x_0 del suo dominio $\mathbf{X} = \mathbf{R}$. Seguendo un approccio piuttosto meccanico e privo di espedienti (ma assolutamente consolidato almeno a livello di scuola secondaria superiore), occorre, a partire dall'insieme delle soluzioni della disequazione $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$, verificare se esiste un intorno $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 interamente contenuto in tale insieme di soluzioni. Si tenga presente che in analisi standard sia ε sia δ sono quantità finite, per quanto esse possano essere arbitrariamente piccole. Si procede così (con $x_0 \neq 0$):

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad |x^2 - x_0^2| < \varepsilon, \quad -\varepsilon < x^2 - x_0^2 < +\varepsilon,$$

$$\begin{cases} x^2 - x_0^2 < \varepsilon \\ x^2 - x_0^2 > -\varepsilon \,. \end{cases}$$

Senza perdita di generalità assumiamo $\varepsilon < x_0^2$ e, in tal caso, il sistema è soddisfatto per

$$x \in \left(-\sqrt{x_0^2 + \varepsilon}\,, -\sqrt{x_0^2 - \varepsilon}\,\right) \cup \left(\sqrt{x_0^2 - \varepsilon}\,, \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}\,\right);$$

sicché $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, con $\delta = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|$, è l'intorno di x_0 cercato.

Se $x_0 = 0$, non ci sono difficoltà e si determina facilmente l'intervallo $I = (-\sqrt{\varepsilon}, +\sqrt{\varepsilon})$. In ogni caso ciò conferma l'esistenza di almeno un δ, per ogni ε.

In *analisi non standard*, il concetto di continuità di una funzione in un punto si definisce in modo più semplice, con un guadagno sia sul piano formale, sia su quello operativo. Convenendo di indicare con f (senza asterisco) anche l'estensione naturale di una funzione reale f all'ambiente $^*\mathbf{R}$, diciamo che f è continua nel punto reale x_0 se

$$\forall x \approx x_0 \,, f(x) \approx f(x_0) \,. \qquad (2)$$

Allora, poiché i numeri iperreali infinitamente vicini a x_0 si scrivono nella forma $x = x_0 + \varepsilon$, dove ε è un infinitesimo, la continuità di $f(x) = x^2$ in x_0 si dimostra così:

$$f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) = (x_0 + \varepsilon)^2 - x_0^2 = \varepsilon\,(2x_0 + \varepsilon) \approx 0,$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che il prodotto di un infinitesimo per una quantità finita è un infinitesimo. Pertanto, come si voleva dimostrare, $f(x)$ è infinitamente vicino a $f(x_0)$ se x è infinitamente vicino a x_0.

Al di là degli aspetti tecnici delle procedure di calcolo, rimane il fatto che la definizione *standard* di continuità impone la fatica (non sempre sopportabile) di esibire un δ esplicito, mentre la definizione *non standard* richiede solo di riconoscere che una certa differenza è un infinitesimo.

Riferimenti bibliografici: [B.1] Giusti E., *Analisi Matematica* 1, Boringhieri, Torino, 1983. [B.2] Barozzi G.C., Matarasso S., *Analisi Matematica* 1, Zanichelli, Bologna, 1986. [B.3] Rudin W., Principi di *Analisi Matematica*, McGraw-Hill, Milano, 1991. [B.4] Pepe P., Foresti P., *Matematica generale* pp. 424, Sansoni, Bologna, 1995. [B.5] Laghi P., *Origini e applicazioni dell'analisi non standard*, Tesi di laurea magistrale in Matematica, Università di Bologna, a. a. 2012-2013. [B.6]. Keisler H. J., *Elementary Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1982.

Eventi

- VI Giornata di Analisi Non Standard – sede: Lucca, complesso di San Micheletto – Sabato 1 ottobre 2016 – a cura di UNIPI e Gruppo NSA di Pisa. Contatti: http://nsa2016.jimdo.com/ o nsa2016lu@gmail.com.
- Congresso Nazionale Mathesis – 27, 28, 29 Ottobre 2016 – sede: Camerino, Palazzo Ducale, sala degli Stemmi – A cura di UNICAM, Mathesis Nazionale. Contatti: www.mathesisnazionale.it/congresso-mathesis/index-camerino.html

Herd Behavior

In riferimento al problema proposto nel numero 208 di MatematicaMente vediamo che cosa può succedere (diamo per noto il teorema di Bayes e supponiamo che le prove siano statisticamente indipendenti e che ogni individuo conosca le scelte (A o B) di chi l'ha preceduto, ma non il colore delle palline estratte).

Il 1° individuo estrae una pallina blu (=b) e sceglie A perché

$$\Pr(A|b) = \frac{\Pr(A)\cdot\Pr(b|A)}{\Pr(A)\cdot\Pr(b|A) + \Pr(B)\cdot\Pr(b|B)} = \frac{(1/2)\cdot(2/3)}{(1/2)\cdot(2/3)+(1/2)\cdot(1/3)} = \frac{2}{3}$$

Il 2° individuo estrae una pallina blu e sceglie A perché

$$\Pr(A|b,b) = \frac{\Pr(A)\cdot\Pr(b,b|A)}{\Pr(A)\cdot\Pr(b,b|A) + \Pr(B)\cdot\Pr(b,b|B)} = \frac{(1/2)\cdot(2/3)\cdot(2/3)}{(1/2)\cdot(2/3)\cdot(2/3)+(1/2)\cdot(1/3)\cdot(1/3)} = \frac{4}{5}.$$

Però, sceglierebbe A anche se avesse estratto una pallina rossa (=r), in base alle regole di decisione. Infatti

$$\Pr(A|b,\,r) = \frac{\Pr(A)\cdot\Pr(b,\,r|A)}{\Pr(A)\cdot\Pr(b,\,r|A) + \Pr(B)\cdot\Pr(b,\,r|B)} = \frac{(1/2)\cdot(2/3)\cdot(1/3)}{(1/2)\cdot(2/3)\cdot(1/3)+(1/2)\cdot(1/3)\cdot(2/3)} = \frac{1}{2}.$$

Ciò comporta che il 2° individuo non dà alcuna informazione utile al 3° individuo il quale, osservando le decisioni dei suoi predecessori, è certo che il 2° individuo ha scelto A in maniera indipendente dal colore della pallina che ha estratto (sceglie sempre A). Il 3° individuo quindi non apprende nulla dal 2° individuo e si trova nello stesso stato d'informazione del 2° individuo. Perciò sceglie A in maniera indipendente dal colore della pallina che estrae. Così avviene per tutti gli altri individui che gli succedono.

Sotto la condizione che l'urna abbia più palline rosse che palline blu, questo risultato ha probabilità$\cdot$(1/3) di verificarsi. È il caso in cui la società cade in un equilibrio in cui tutti razionalmente credono il falso.